Gabriela Streinu-Cercel
Costel Chiteș
Ioan Marinescu
Gabriela Constantinescu
Boris Singer

MATEMATICĂ

manual pentru clasa a X-a

trunchi comun și curriculum diferențiat

SIGMA

București, 2022

CUPRINS

Capitolul 1

NUMERE REALE

Scurt istoric

În zorii civilizației oamenii numărau și socoteau cu ajutorul bețișoarelor, pietrelor sau crestăturilor pe roboj. Numele latin „calculare" (a socoti) provine de la „calculus" (pietricele).

Odată cu dezvoltarea societății omenești, numerele au fost implicate în activități tot mai complexe; de la producția de unelte și arme, până la comerțul cu sclavi și bani. În administrație, funcționarii calculau impozite cu care se plăteau armate, construcții de drumuri, poduri, temple, fortărețe și apeducte.

Scrib numărând și înregistrând negrii captivi (Tubingue 1887)

În Egiptul Antic cunoștințele de matematică erau foarte prețuite. Din perioada Imperiului Mijlociu (2000-1700 î.e.n.) s-au păstrat documente ce reprezentau un fel de manual de matematică pentru școlile de scribi. Atunci lecțiile aveau un caracter dogmatic, adică problemele de fiecare tip trebuiau învățate pe dinafară. Cunoștințele de matematică erau de regulă transmise de scribi de la părinte la copil. Fiul ce intra într-o astfel de școală era îndemnat „să-și îndrepte inima către cărți" și era prevenit asupra necazurilor ce-l așteaptă dacă nu reușește să devină scrib. La Londra se păstrează un papirus din sec. XX î.e.n. care conține 85 de probleme și care dovedește faptul că egiptenii cunoșteau sistemul zecimal de numerație, ca și fracțiile binare de tipul $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$.

Pitagora (570-500 î.e.n.)

O mie de ani mai târziu, în Grecia antică, filozofii căutau să explice legătura dintre materie și spirit. Pitagora a înțeles că punctele geometrice sunt conceptul pe care se poate baza studiul matematicii, ceea ce i-a permis descoperirea segmentelor incomensurabile (spunem că două segmente AB și CD sunt comensurabile, dacă raportul $\frac{AB}{CD}$ este rațional).

În sec. al IV-lea î.e.n., Euclid a studiat figuri geometrice plane și spațiale, numere naturale, fracții, dar și numere iraționale ce apar din ecuații pătratice. „Elementele lui Euclid" oferă modelul sistemului deductiv; ele încep prin definiții, continuă cu postulate (axiome) și propoziții deduse din postulate.

Euclid (320-270 î.e.n.)

Arhimede a separat aritmetica teoretică de cea practică și geometria teoretică de cea practică. El a introdus în matematică DEMONSTRAȚIA, ceea ce a deschis larg porțile raționamentelor prin care pot fi generalizate rezultate particulare și obținute noi consecințe. Arhimede a studiat arii și volume ale unor corpuri curbilinii, iar rezultatele lui au stat, peste aproape 2000 de ani, la baza analizei matematice.

Arhimede (287-212 î.e.n.)

În India, Brahmagupta (sec. VII) a introdus pentru prima oară numerele negative și a dat regulile de adunare și scădere cu numere pozitive și negative. Brahmagupta știa să raționalizeze numitorii unor expresii ce conțineau radicali.

Reamintim necesitatea introducerii numerelor negative în rezolvarea ecuațiilor de tipul $x + 5 = 2$, a numerelor raționale (fracționare) în rezolvarea ecuațiilor de tipul $2x - 3 = 0$ și a numerelor iraționale în rezolvarea ecuațiilor de tipul $x^2 - 2 = 0$.

Mari matematicieni ai secolului al XIX-lea s-au preocupat de construcția numerelor reale plecând de la mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$. De exemplu, K. Weierstrass, G. Cantor și R. Dedekind.

De abia în anul 1891 Giuseppe Peano a introdus sistemul axiomatic al mulțimii numerelor naturale $\mathbb{N}$. Noțiuni primare sunt: „zero", „număr" și „succesor".

G. Peano (1858-1932)

K. Weierstrass (1815-1897)

G. Cantor (1845-1918)

R. Dedekind (1831-1916)

1. Puteri cu exponent întreg

Vom introduce puterile cu ajutorul unei probleme.

EXEMPLE

Pentru măsurarea distanțelor cerești se folosește unitatea de măsură *an-lumină*. 1 an-lumină este distanța parcursă de lumină într-un an.

Viteza luminii este $c = 3 \cdot 10^8$ m/s și 1 an are aproximativ 365 de zile și 6 ore.

a) Ce distanță exprimată în km parcurge lumina într-un an?

b) Sistemul stelar cel mai apropiat, Norul lui Magellan, se află la 140000 de ani-lumină de galaxia noastră, Calea Lactee. Ce distanță, măsurată în km, desparte galaxia noastră de Norul lui Magellan?

Rezolvare.

Un an are aproximativ $365 \cdot 24 + 6 = 8766$ ore, deci $8766 \cdot 3600 = 31557600$ s.

Lumina parcurge într-un an circa $31557600 \cdot 3 \cdot 10^8 = 94672800 \cdot 10^8$ km$\simeq 9{,}5 \cdot 10^{15}$ km.

Distanța de la Calea Lactee până galaxia Norul lui Magelan este

$$140\,000 \cdot 9{,}5 \cdot 10^{15} = 133 \cdot 10^{19} \text{ km.} \quad \blacksquare$$

Observații.

♦ Calculul cu puteri face posibilă simplificarea scrierii, concentrarea calculelor, aproximarea unui rezultat.

♦ Puterile lui 10 au o importanță deosebită pentru exprimarea numerelor mari (de exemplu: un milion = 10^6; un miliard = 10^9; un bilion = 10^{12}; un trilion = 10^{18} etc.)

SĂ NE AMINTIM

Definiție.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ și $a \in \mathbb{R}$ *puterea n a lui a* este produsul a n factori egali cu a. Notăm $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$; n se numește *exponent*, iar a se numește *bază*.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}}, \text{ de unde } a^1 = a \text{ și } 0^n = 0, n \neq 0$$

Pentru a nenul, facem convenția: $\boxed{a^0 = 1}$. Scrierii 0^0 nu îi atribuim nici un sens.

Numim *pătratul* unui număr a numărul a^2 și *cubul* unui număr a, numărul a^3.

Observație.

Din definiție reiese că pentru orice număr natural nenul n, $1^n = 1$.

Exemple. $2^3 = 8$; $2^{10} = 1024$; $(-2)^5 = -32$; $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4}$.

AI ÎNȚELES?

Calculează:

10^2; $\left(\frac{1}{4}\right)^5$; $\left(\sqrt{3}\right)^4$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^5$; $\left(-\sqrt{2}\right)^2$; 3^3; 4^4; $(-5)^4$; 0^0; 0^2.

Definiție. Fie a un număr real nenul și n un număr natural. Atunci $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

Puterile cu exponent negativ sunt utilizate și în exprimarea unităților de măsură (exemple: $m\cdot s^{-1}=\dfrac{m}{s}$ pentru viteză, $g\cdot cm^{-3}=\dfrac{g}{cm^3}$ pentru densitate) sau pentru a avea o imagine de ansamblu asupra obiectelor de dimensiuni foarte mici comparativ cu obiecte obișnuite. De exemplu, masa atomului de hidrogen este $0{,}167\cdot 10^{-23}$.

Exemple. $5^{-3}=\dfrac{1}{5^3}$; $\quad(-7)^{-4}=\dfrac{1}{(-7)^4}$; $\quad\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-100}=\left(2^{-1}\right)^{-100}=2^{100}$

Puterea de exponent -1 a unui număr real nenul este inversul numărului: $\boxed{a^{-1}=\dfrac{1}{a}}$.

Ai înțeles

Exprimă sub formă de puteri cu exponent număr natural:

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$; $\quad\left(\sqrt{2}\right)^{-3}$; $\quad 2^{-3}$; $\quad\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-10}$; $\quad\left(\sqrt{10}\right)^{-10}$.

Ai înțeles

Puterile cu exponent natural au baza număr real, iar cele cu exponent întreg au baza număr real **nenul.** Oriunde vom întâlni puteri cu exponent întreg, punem condiția ca baza să fie nenulă.

Teoremă. *Proprietăți ale puterilor cu exponent întreg*

Fie $a, b\in\mathbb{R}^*$, $m, n\in\mathbb{Z}$. Avem:

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $\qquad$ 2) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $\qquad$ 3) $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$

4) $(a\cdot b)^n=a^nb^n$ $\qquad$ 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ $\qquad$ 6) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

Exemple

1) $(3{,}1)^2\cdot(3{,}1)^3=(3{,}1)(3{,}1)\cdot(3{,}1)(3{,}1)(3{,}1)=(3{,}1)^5=(3{,}1)^{2+3}$

2) $\dfrac{2^7}{2^3}=\dfrac{2^{3+4}}{2^3}=\dfrac{2^32^4}{2^3}=2^4=2^{7-3}$; $\quad\dfrac{2^5}{2^8}=\dfrac{2^5}{2^{5+3}}=\dfrac{2^5}{2^52^3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{2^{8-5}}=2^{5-8}=2^{-3}$.

3) $((-2)^2)^5=(-2)^2(-2)^2(-2)^2(-2)^2(-2)^2=(-2)^{2\cdot 5}=(-2)^{10}=1024$.

4) $5^0=1$; $\quad\left(\sqrt{2}\right)^0=1$; $\quad\left(-\dfrac{3}{2}\right)^0=1$; $\quad 1{,}1^0=1$; $\quad 1^5=1$; $\quad 1^{-3}=1$; $\quad 1^{50^2}=1$.

5) $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\sqrt{3}\right)^4$; $\quad\left(\dfrac{3}{2}\cdot\pi\right)^6=\left(\dfrac{3}{2}\right)^6\cdot\pi^6$; $\quad\left(\dfrac{-3}{5}\right)^2=\dfrac{(-3)^2}{5^2}=\dfrac{9}{25}$.

6) $\left(\dfrac{1}{-3{,}5}\right)^6=\dfrac{1}{(-3{,}5)^6}$; $\quad(-3{,}5)^6=\left[(-1)\,3{,}5\right]^6=(-1)^6\cdot 3{,}5^6=3{,}5^6$.

7) $\left(\dfrac{1}{0{,}5}\right)^{-1}=0{,}5$; $\qquad\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-1}=\pi$; $\qquad(-3)^{-1}=\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$.

Ai înțeles? Calculează: 2^{-3}; $\left(\sqrt{10}\right)^4$; $(-2)^{-3}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)^4$; $(-2)^3\cdot(-5)^3$; $\left(\frac{5}{2}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^3$; $\left(-\frac{7}{2}\right)^3\left(\frac{2}{7}\right)^2(-2)^3$; $(-4)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; $\left(4\sqrt{0,5}\right)^3\left[\left(4\sqrt{0,5}\right)^{-2}\right]^2$.

Teoremă. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{N}$.

- Dacă $a > 0$, atunci $a^n > 0$.
- Dacă $a < 0$ și n par, atunci $a^n > 0$.
- Dacă $a < 0$ și n impar, atunci $a^n < 0$.

Observație.

Pătratul oricărui număr real nenul este pozitiv și $a^2 = (-a)^2$.

Teoremă. *Compararea puterilor*

Fie $a \in (0, \infty)$ și n, m numere întregi. Avem:

1) dacă $a > 1$, atunci $a^n < a^m$ dacă și numai dacă $n < m$ (spunem că ordinea se conservă).

2) dacă $0 < a < 1$, atunci $a^n < a^m$ dacă și numai dacă $n > m$.

3) dacă $a \neq 1$, atunci $a^n = a^m$ dacă și numai dacă $n = m$.

Demonstrație.

1) Fie numărul real $a > 1$ și n, m numere întregi. Să presupunem că $n < m$. Atunci a^{m-n} este supraunitar: $a^n = a^n \cdot 1 < a^n \cdot a^{m-n} = a^m$.

Presupunem acum că $a^n < a^m$. Dacă m ar fi mai mic decât n, a^m ar fi mai mic decât a^n, ceea ce contrazice ipoteza de lucru $a^n < a^m$. Dacă $m = n$, atunci $a^n = a^m$. Deci $n < m$.

2) Fie numărul real a astfel încât $0 < a < 1$. Pentru a compara a^n și a^m considerăm numărul $b > 1$, cu proprietatea că $a = \frac{1}{b}$. Studiul se reduce la cazul precedent.

3) Fie $a \neq 1$. Avem $a^n = a^m$, dacă și numai dacă $\frac{a^n}{a^m} = 1$, adică $a^{n-m} = 1$. Rezultă $n - m = 0$, deci $n = m$. ■

Ai înțeles?

- Arată că $2^{30} > 4^{14}$; $9^3 > 3^5$; $(-3)^5 < (-3)^2$; $2^{100} = 4^{50}$.
- Fie numărul $a = 2,1$. Compară numerele a^2 și a^3.
- Fie numărul $b = 0,9$. Compară numerele b^2 și b^3.

- Compară numerele: 3^6 și $(3^3)^3$; $(0,5)^4$ și $(0,5)^6$; $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ și $\frac{1}{2^6}$; $5^2\cdot 5^3$ și $\left(5^2\right)^3$.
- Calculează: $\left(2^{-1}+3^{-1}\right)\cdot\left(2^{-1}-3^{-1}\right)+\frac{\left(2^{-1}\cdot 2^0\right)^{-4}}{2^3}$; $\left(5^{-5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 10^{-5}$.

SĂ NE AMINTIM

Identități remarcabile

Se cunosc, din anii trecuți, următoarele identități (*formule de calcul prescurtat*):

$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$ $\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$ $\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

$\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ $\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

Tot prin calcul direct se verifică următoarele identități:

$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$, $\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

AI ÎNȚELES?

- Dezvoltă expresiile:

$(3x+1)^2$; $(2x+3)^3$; $(x-2y^2)^2$; $(3x-y)^3$; $(3a+2b)^3$; $\left(\frac{1}{2}a-2b\right)^3$

- Scrie sub formă de produs expresiile:

$\frac{x^3}{8}-27y^3$; $27x^3+8y^3$; a^3-8b^3; $\frac{a^3}{27}-\frac{b^3}{8}$

SĂ NE AMINTIM

... ordinea efectuării operațiilor!

În calculele cu numere reale se efectuează mai întâi ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile și, în final, adunările și scăderile.

PROBLEME PROPUSE

- 1. Calculează puterile de exponent 1, 2, 3 și 4 pentru fiecare dintre numerele:

$\frac{2}{5}$; $-\frac{1}{4}$; $0{,}2$; $0{,}(3)$; $-0{,}002$.

- **2. Fără a efectua calculele, determină semnele următoarelor puteri:**

$\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$; $\left(-\frac{7}{11}\right)^3$; $\left(\frac{1}{35}\right)^{14}$; $\left(-\frac{13}{17}\right)^{10}$; $\left(-\frac{21}{31}\right)^5$; $\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^5\right)^2$

- 3. Scrie următoarele numere ca puteri ale lui 10: 10; 100; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $-0{,}01$.

- 4. Calculează în două moduri: $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\right)^3$; $\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^4$; $\left(\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{8}\right)^2$; $\left(\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right)^3$;

$\left(\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{9}{4}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}\right)^2$; $\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot4\right)^3$; $\left(\frac{3}{10}\cdot(-5)\cdot\left(-\frac{2}{8}\right)\right)^4$; $\left((-0{,}3)\cdot0{,}(3)\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{6}\right)^3$.

Exemplu:

I $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{2\cdot3}\right)^3=\frac{\cancel{2^3}}{3^3}\cdot\frac{5^3}{\cancel{2^3}\cdot3^3}=\frac{5^3}{3^6}$; II $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\right)^3=\left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{5}{\cancel{2}\cdot3}\right)^3=\left(\frac{5}{3^2}\right)^3=\frac{5^3}{3^{2\cdot3}}=\frac{5^3}{3^6}$

● **5.** Scrie următoarele numere ca puteri cu baza 3: 9; 243; $\frac{1}{81}$; 3; 1; 729.

● **6.** Calculează în două moduri: a) $\left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}}\right)^3$; b) $\left(\frac{\frac{1}{7}}{-5}\right)^2$; c) $\left(\frac{4}{\frac{2}{5}}\right)^4$.

● **7.** Calculează: $\frac{2^4}{\left(2^3\right)^2}$; $25\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(-2^3\right)$; $\frac{7^5\cdot 5^4}{5^5\cdot 49^3}$; $\frac{4^6\cdot 9^5+6^9\cdot 120}{8^4\cdot 3^{12}-6^{11}}$.

● **8.** Calculează puterile de exponent -1, -2, -3 și -4 pentru fiecare din numerele:
4; -3; $0{,}5$; $0{,}1(3)$; $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{0{,}3}$; $-\frac{3}{7}$; $0{,}001$.

● **9.** Calculează: $\frac{2^3+2^{-3}}{4^3+1}$; $\left(5^{-5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 10^{-5}$; $\frac{\left((-2)^2\right)^3\cdot(-4)^{-2}}{(-2)^3\cdot(-2)^2}$; $\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}}$.

● **10.** Scrie următoarele expresii numerice sub forma a^n, unde $a\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{Z}$:
$2\cdot 4\cdot 16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 2^3$; $2^2\cdot(15)^2$; $2^2\cdot 9\cdot(54)^{-1}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$; $-32\cdot 243^{-1}$.

● **11.** Efectuează: a) $\left[(-2)^3\right]^7+\left(2^7\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{54}+(-9)^{-27}$; b) $\left[\left(99^2+99^{-2}\right)\left(99^2-99^{-2}\right)\right]^0$;
c) $\left[\left(3-\frac{8}{3}\right)^n\cdot\left(-3+\frac{8}{3}\right)^{-n}\right]^{-2}$, $n\in\mathbb{N}$; d) $(-5)^n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

● **12.** Scrie produsele următoare sub formă zecimală: $4\cdot 10^{-2}$; $17\cdot 10^{-3}$; $2314\cdot 10^{-2}$.

● **13.** Scrie numerele următoare sub forma $a\cdot 10^n$, unde $n\in\mathbb{Z}$ și a este un număr zecimal cuprins între 1 și 10: $324{,}15$; 64; $0{,}00035$; $0{,}004$; 1300; 540000.

● **14.** Aceeași cerință pentru numerele: $1800\cdot 400$; $3000\cdot 0{,}00005$; $7\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}004$.

● **15.** Determină numerele întregi p și q astfel încât $2^p\cdot 5^q=\frac{1}{125000}$.

● **16.** Scrie fiecare din expresiile următoare ca putere a numărului real nenul x:
$x\cdot\frac{1}{x^3}\cdot x^6$; $\frac{x^2\cdot x^{-5}}{x^{10}}$; $\frac{\left(\left(x^2\right)^{-1}\right)^3}{x^4\cdot\left(x^{-2}\right)^{-3}}$; $\left(x^{-2}\cdot x^{-3}\right)^{-2}$.

● **17.** Arată că: a) $x^4-y^4=(x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right)$;
b) $x^4-y^4=(x-y)\left(x^3+x^2y+xy^2+y^3\right)$; c) $x^5-y^5=(x-y)\left(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\right)$.

18. Găsește numerele întregi n care satisfac condițiile:

a) $5^n \cdot 25 = 5^{-1} \cdot 5^3$; b) $4^{-6} \cdot 256^2 \cdot 2^n = \frac{2^5}{2^4 \cdot 2^{-3}}$.

19. Găsește numerele naturale n care satisfac condițiile:

a) $3 < 3^n < 243$; b) $4 \cdot 32 < 2^n < 1024$;

c) $(3{,}5)^3 \cdot 0{,}6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \leqslant \left(\frac{7}{5}\right)^n \leqslant \left(\frac{49}{25}\right)^4 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$.

20. Scrie fiecare din expresiile următoare sub forma $A \cdot x^m \cdot y^n$, unde $A \in \mathbb{R}$ și $m,n \in \mathbb{Z}$:

a) $\frac{12x^3y^{-1}}{\left(2x^3y^2\right)^2 x^3}$; b) $2x^3y^{-2}\frac{1}{6y}\left(x^{-1}y^3\right)^{-2}$; c) $\left(x^{-1}y^3\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x}{4y^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-6x^0}{y^3}\right)^{-3}$.

21. Calculează:

a) $(7-1)[(11-2):3+2(7-18:3)]$; b) $\left(\left(2^{-3}+4^2\right)2^3-1\right) \cdot 2^{-7}$; c) $\left[\left(9^2+3^4\right) \cdot 2^{-1}-3^2\right] \cdot 3^{-2}$.

22. Verifică egalitățile următoare:

a) $12^3 = \left(9+\sqrt{5}\right)^3 + \left(9-\sqrt{5}\right)^3$; b) $2^9 = \left(1+\sqrt{85}\right)^3 + \left(1-\sqrt{85}\right)^3$.

23. Arată că, pentru orice numere reale x, y și z:

$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$.

24. Arată că pentru orice numere reale a și b, $a^2 = b^2$ dacă și numai dacă $|a| = |b|$.

25. Fie a și b două numere reale astfel încât $a < b$. Arată că $a^3 < b^3$.

26. Fie a și b numere reale cu $a < b$. Compară a^2 și b^2 în funcție de semnele lui a și b.

27. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Compară a^{-3} și b^{-3}, precum și a^{-2} și b^{-2}.

28. Justifică egalitatea: $99\,999\,999^2 + 20\,000^2 = 100\,000\,001^2$.

29. Arată că, pentru orice numere reale x și y, avem $\frac{(x+y)^2}{4} \geqslant xy$. Demonstrează, pornind de aici, că dintre toate dreptunghiurile de arie dată pătratul are perimetrul cel mai mic.

30. Arată că pentru orice numere reale x și y: $xy \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.

Demonstrează, pornind de aici, că: $xy + yz + xz \leqslant x^2 + y^2 + z^2$.

31. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ avem $\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)}$

32. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$:

$\boxed{a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)}$.

2. Radicali

Rădăcina pătrată dintr-un număr real pozitiv

SĂ NE AMINTIM

- Pătratul unui număr real a este numărul $a^2 = a \cdot a$. Avem $a^2 \geqslant 0$.
- Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 = b^2$ dacă și numai dacă $a = \pm b$.

Teoremă.

Pentru orice număr real $a \geqslant 0$ există un unic număr real $x \geqslant 0$ astfel încât $x^2 = a$. În acest caz, numărul x este notat $\sqrt{a}$ și numit *rădăcina pătrată a numărului a*, sau *radical din a*.

Demonstrație.

Aparatul matematic studiat până acum nu ne permite să demonstrăm existența numărului $\sqrt{a}$, pentru a număr real pozitiv oarecare. Vom demonstra însă unicitatea lui $\sqrt{a}$. Presupunem că există $x, y \geqslant 0$ astfel încât $x^2 = y^2 = a$. Obținem $0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, de unde $x - y = 0$ sau $x + y = 0$. Deoarece x și y sunt pozitive, din $x + y = 0$ obținem $x = y = 0$. De asemenea, dacă $x - y = 0$ obținem $x = y$. ■

Exemplu. Deoarece $0^2 = 0$, avem $\sqrt{0} = 0$.

Există două metode de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv:

I. *Descompunerea în factori primi.* **Exemplu:** $\sqrt{\dfrac{784}{50625}} = \dfrac{\sqrt{2^4 \cdot 7^2}}{\sqrt{3^4 \cdot 5^4}} = \dfrac{\left(\sqrt{2^2 \cdot 7}\right)^2}{\left(\sqrt{3^2 \cdot 5^2}\right)^2} = \dfrac{28}{225}$

II. *Algoritmul extragerii rădăcinii pătrate.* **Exemplu:**

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{15129} & 123 \\ \hline \underline{\ \ 1\ \ } & 22 \cdot 2 = 44 \\ = 51 & 243 \cdot 3 = 729 \\ \underline{\ \ 44\ \ } & \\ = 729 & \\ \underline{\underline{===}} & \end{array}$$

Teoremă. *Proprietăți ale rădăcinii pătrate*

Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geqslant 0$, avem:

1) $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$ 2) $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$ 3) $\boxed{\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b \neq 0}$ 4) $\boxed{\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n}$

Demonstrație. 1) Deoarece $\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = |a|^2 = a^2$, rezultă că $\sqrt{a^2}$ și $|a|$ verifică ecuația $x^2 = a^2$, care are soluție unică. Ca urmare, $\sqrt{a^2} = |a|$.

2) Fie $a, b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă $x = \sqrt{a}$ și $y = \sqrt{b}$, atunci $xy = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $xy \geqslant 0$. Ridicăm la pătrat și obținem $(xy)^2 = ab$, deci $xy = \sqrt{ab}$.

Demonstrațiile punctelor 3) și 4) se fac în mod asemănător cu cele de mai sus. ■

EXEMPLE

$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$; $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$; $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{(2-3)^2} = |2-3| = 1$.

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$; $\sqrt{2{,}5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{25} = 5$;

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$; $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

În ultimele două exemple „am scos” de sub radical cel mai mare întreg posibil.

Observație.

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, atunci $\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_n}$.

Exemple.

$$\sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5}; \quad \sqrt{2{,}25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1{,}5.$$

Verifică dacă ai înțeles!

Unde este greșeala? Pentru $x = -1$ avem $-1 = x = \sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

Teoremă. *Compararea a doi radicali*

Fie a și b două numere reale pozitive. Avem $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ dacă și numai dacă $a < b$.

Demonstrație.

Fie x și y două numere pozitive astfel încât $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, deci $x^2 = a$, $y^2 = b$.

Avem $x < y$ dacă și numai dacă $x^2 < y^2$, rezultă că $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ dacă și numai dacă $a < b$. ∎

SĂ NE AMINTIM

- Pentru $a \geqslant 0$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$;
- Pentru $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a - b$.

Exemplu.

Să calculăm, cu aproximație, $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dacă înlocuim $\sqrt{2}$ cu 1,41 obținem $\frac{1}{1{,}41} = \frac{100}{141} \approx 0{,}71$.

Un alt mod de calcul este următorul: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1{,}41}{2} = 0{,}705$

Această metodă de calcul prin care am transformat pe $\frac{1}{\sqrt{2}}$ în $\frac{\sqrt{2}}{2}$ este mai comodă.

În multe aplicații este necesară transformarea unor expresii cu radicali la numitor în expresii care nu au radicali la numitor. Operația se numește *raționalizarea numitorilor*.

În general, pentru a raționaliza numitorii ce conțin radicali, procedăm astfel:

- dacă numitorul este de forma $\sqrt{a}$, fracția se amplifică cu $\sqrt{a}$;
- dacă numitorul este de forma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, fracția se amplifică cu $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.
- dacă numitorul este de forma $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, fracția se amplifică cu $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.